MODULATION ET DEMODULATION EN PRESENCE DE BRUIT

Dans cette étude, on utilisera l'outil de la transformation de Fourier pour se familiariser avec quelques phénomènes de base occurant en réception de signaux modulés avec bruit. les exercices "théoriques" et les manipulations pratiques se trouvent dans le corps du texte sous les rubriques Exercices.

Un signal échantillonné reçu à l'entrée d'un récepteur a la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
Z(t) &= A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + N(t) && (1)\\
N(t) &= N'(t)\cos\omega_0 t + N''(t)\sin\omega_0 t;\ \ t = n\theta && (2)
\end{aligned}
$$

Sous cette forme générale, on est en présence d'une modulation en amplitude et en phase. Le signal A et le bruit N occupent la bande spectrale dite de base $[-B, B]$. La fréquence de modulation ω_0 est telle que : $B \ll \omega_0$. N' et N'' sont deux bruit indépendants de densité spectrales constante dans la bande de base. Le fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée pour éviter un repliement de spectre.

Dans la suite, prenez les valeurs suivantes:

$$
\begin{aligned}
N &= 1024;\\
Te &= 0.01;\\
B &= 10/(N * Te);\\
f1 &= B/2;\\
f0 &= 10 * B;\\
m &= 0.8;\\
phi &= 0;\\
indice &= (0:1:N-1);\\
t &= Te * indice;
\end{aligned}
$$

Exercice 1 (Modulation d'amplitude)

- On prend $\varphi = \text{const.}$ et $A(t) = (1 + m\cos\omega_1 t)$ avec $\omega_1 = B/2 < B < \omega_0$, $0 < m < 1$. Générer une séquence de 1024 échantillons de $Z(t)$ ainsi obtenu en faisant $N(t) = 0$. Produire le spectre (fft) de ce signal.

Indication: Utiliser la fonction $ones(1, N)$ pour produire une ligne de 1.

- Pour construire le bruit N dans la bande de modulation, on partira de deux bruits Gaussiens indépendants qu'on filtrera dans la bande $[-B, B]$ et qu'on modulera ensuite suivant la formule (2). (Pour le filtrage on utilisera successivement les opérations fft et fft inverse). Générer une séquence de 1024 échantillons de N ainsi construit. Représenter le spectre de ce bruit.

Indication: Utiliser les instructions suivantes pour construire les bruits filtrés:

$$
\begin{aligned}
N1 &= sqrt(v) * randn(1, N); \\
N2 &= sqrt(v) * randn(1, N); \\
\\
filtre &= zeros(1, N);\ \ \text{\%filtre dans le domaine fréquentiel} \\
filtre(1, 1 : B * N * Te) &= ones(1, B * N * Te); \\
filtre(1, N - B * N * Te + 1 : N) &= ones(1, B * N * Te);
\end{aligned}
$$

- Additionner le signal et le bruit pour obtenir le signal reçu Z. Produire son spectre.

Exercice 2 (Démodulation)

- On prend l'expression du signal reçu (1). Montrer qu'en multipliant $Z(t)$ successivement par $\cos \omega_0 t$ et $\sin \omega_0 t$ et en effectuant un filtrage approprié, on obtient les signaux démodulés :

$$
\begin{aligned}
X(t) &= A(t) \cos \varphi(t) + N'(t) \\
Y(t) &= A(t) \sin \varphi(t) + N''(t).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

On dit que l'on a transposé Z dans la bande de base.

- On veut estimer maintenant l'amplitude et la phase contenus dans (3). Pour tout t on forme la densité de probabilité du couple d'observations (X, Y) :

$$
f(X_t, Y_t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp -\frac{1}{2} \left\{ (X_t - A_t \cos \varphi_t)^2 + (Y_t - A_t \sin \varphi_t)^2 \right\} \tag{4}
$$

Montrer que les A et φ maximisant cette fonction (dite de vraisemblance) sont donnés par :

$$
\hat{A}_t = \left(X_t^2 + Y_t^2 \right)^{1/2}; \quad \hat{\varphi}_t = \arg\tan \left(Y_t / X_t \right) \tag{5}
$$

L'amplitude et la phase estimés ont donc une forme géométrique très simple.

- On se place en modulation d'amplitude dans les conditions de l'exercice 1. Réaliser à partir d'une réalisation de $Z(t)$, la modulation (3) et l'estimation de l'amplitude (5) pour différentes valeurs du rapport signal/bruit. Représenter graphiquement ces observations.